这里是 Hartshorne 第二章第二节习题.

2 概形

习题 2.1. 设 A 是环, $X = \operatorname{Spec} A$, $f \in A$, $D(f) \subseteq X$ 为 $V((f))$ 的开补集. 证明 $(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)})$ 同构于 $\operatorname{Spec} A_f$.

证明. 构造同构映射 $\phi\colon D(f) \to \operatorname{Spec} X$ 如下. 若 $\mathfrak{p} \in D(f)$, 则 $f \notin \mathfrak{p}$, 从而 $\mathfrak{p}_f \subseteq A_f$. 定义 $\phi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_f$, 则 ϕ 作为集合的映射是双射. 此外, 还有自然的同构 $A_{\mathfrak{p}} \cong (A_f)_{\mathfrak{p}_f}$, 因此容易定义并验证同构 $(\phi, \phi^\sharp)\colon (D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)}) \cong \operatorname{Spec} A_f$. □

习题 2.2. 设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是概形, $U \subseteq X$ 是开集. 证明 $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ 是概形. 我们将其称之为开集 U 上的*诱导概形结构*, 并将 $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ 称为 X 的*开子概形*.

证明. 注意到任意仿射概形中存在一组由同构于仿射概形的开集构成的基, 即 $(D(f), \mathcal{O}|_{D(f)})$. 因此仿射性是局部性质. 从而概形的开子集仍然局部仿射, 因此也是概形. □

习题 2.3. 设 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是概形. 如果对任意开集 $U \subseteq X$, $\mathcal{O}_X(U)$ 中都没有幂零元素, 就说 $(X, \mathcal{O}_X)$ *既约*.

(a) 证明: $(X, \mathcal{O}_X)$ 既约当且仅当对任意 $P \in X$, 局部环 $\mathcal{O}_{X,P}$ 里都没有幂零元素.

(b) 令 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为概形. 令 $(\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}$ 为预层 $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)_{\mathrm{red}}$, 其中, 对任意环 A, A_{red} 表示 A 商掉幂零元的理想构成的商环. 证明 $(X, (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}})$ 是概形. 我们称之为 X 的*既约化概形*, 记作 X_{red}. 证明存在同态 $X_{\mathrm{red}} \to X$, 其限制在底空间上是同胚.

(c) 设 $f\colon X \to Y$ 是概形同态, 且 X 既约. 证明 f 穿过 Y_{red}.

证明. (a) 若 U 是开集, $s \in \mathcal{O}_X(U)$ 幂零, 则对任意 $P \in U$, s_P 幂零. 因此若 $\mathcal{O}_{X,P}$ 中都无幂零元素, 即知 $s_P = 0 \forall P \in U$, 因此 $s = 0$. 充分性即证. 反之, 若 X 既约, 则对任意 $P \in X$, $\mathcal{O}_{X,P} = \varinjlim_{P \in U} \mathcal{O}_X(U)$ 是既约环的直极限, 因此也既约.

(b) 只需注意到 $(A_f)_{\mathrm{red}} \cong (A_{\mathrm{red}})_f$, 因此 $(\operatorname{Spec} A)_{\mathrm{red}} \cong \operatorname{Spec} A_{\mathrm{red}}$. $X_{\mathrm{red}} \to X$ 的映射容易构造, 即在每个截面上对应商同态.

(c) 若 X 既约, 则同态 $f^\sharp\colon \mathcal{O}_Y(U) \to f_*(\mathcal{O}_X)(U)$ 必定将幂零元映射到 0, 因此穿过 $\mathcal{O}_Y(U)_{\mathrm{red}}$. 从而易知 f 穿过 Y_{red}. □

习题 2.4. 令 A 是环, $(X, \mathcal{O}_X)$ 是概形. 任意给定 $f\colon X \to \operatorname{Spec} A$, 考虑整体截面上的映射, 就得到环同态 $A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. 因此存在自然映射

$$\alpha\colon \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Sch}}(X, \operatorname{Spec} A) \to \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Rings}}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)).$$

证明 α 是双射.

证明. 设 $g\colon A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, 定义映射 $f\colon X \to \operatorname{Spec} A$ 如下. 对于 $P \in X$, 考虑复合映射 $A \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_{X,P}$, 则 $\mathcal{O}_{X,P}$ 的极大理想的原像也是 A 中的素理想, 即为 $f(P)$. 由定义, 自然有映射 $f^\sharp_{\mathfrak{p}}\colon A_{\mathfrak{p}} \to f_*(\mathcal{O}_X)_{\mathfrak{p}}$. 因此容易定义概形同态 $(f, f^\sharp)\colon X \to \operatorname{Spec} A$.

若记以上构造为自然映射 $\beta\colon \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Rings}}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \to \operatorname{Hom}_{\mathfrak{Sch}}(X, \operatorname{Spec} A)$, 不难验证 α 与 β 互为逆映射. 从而 α 必定是双射. □

习题 2.5. 描述 $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, 并证明它是概形范畴中的终对象.

证明. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 的底空间是以所有素数为点的有限补空间. 对一个开集 U, 设 U 不包含的素数为 $p_1, \ldots, p_k$, 则 $\Gamma(U, \operatorname{Spec} \mathbb{Z})$ 是所有分母仅有 $p_1, \ldots, p_k$ 这些素因子的有理数构成的环.

由习题 2.4 即知 $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 是概形范畴的终对象, 因为 $\mathbb{Z}$ 是环范畴的始对象. □

习题 2.6. 描述零环的谱, 并证明它是概形范畴的始对象.

证明. 零环的谱是空集. 显然是始对象. □

习题 2.7. 令 X 是概形. 对任意 $x \in X$, 设 $\mathcal{O}_x$ 是 x 处的局部环, $\mathfrak{m}_x$ 是其极大理想. 定义 x 处的*剩余域*是 $k(x) = \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x$. 设 K 是域. 证明要给出 $\operatorname{Spec} K \to X$ 的同态, 等价于给出点 $x \in X$ 及域嵌入 $k(x) \to K$.

证明. $\operatorname{Spec} K$ 是单点空间, 因此由定义立证. □

习题 2.8. 设 X 是概形. 对 $x \in X$, 定义 X 中 x 处的 *Zariski 切空间* T_x 是 $k(x)$-向量空间 $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$ 的对偶空间. 假设 X 是域 k 上的概形, $k[\epsilon]/\epsilon^2$ 是 k 上的*对偶数环*. 证明要给出从 $\operatorname{Spec} k[\epsilon]/\epsilon^2$ 到 X 的同态, 等价于给出一个*k-有理点* $x \in X$ (即 $k(x) = k$) 和 T_x 的一个元素.

证明. $\operatorname{Spec} k[\epsilon]/\epsilon^2$ 也是单点空间. 因此由定义易证. □

习题 2.9. 设 X 是拓扑空间, Z 是其不可约闭子集. Z 的*一般点*就是闭包等于 Z 的点. 若 X 是概形, 证明每个(非空) 不可约闭子集都有唯一的一般点.

证明. 在一般情况下, 对任意与 Z 相交的仿射开子集 U, 由上述推导即知存在唯一的 $\xi_U \in Z \cap U$ 使得 $\{\xi_U\}^- \cap U = Z \cap U$. 若 U, V 是两个这样的开集, 则由不可约性质知 $U \cap V \cap Z$ 非空. 取仿射开集 $W \subseteq U \cap V$ 使得 $W \cap Z$ 非空. 由上述推导, ξ_U 和 ξ_V 也同时属于 W, 并且是 W 中 $W \cap Z$ 的唯一一般点. 因此所有 ξ_U 全部相等, 也就是 Z 的一般点.

若 $X \cong \operatorname{Spec} A$ 是仿射概形, 则其非空不可约闭子集必定形如 $V(\mathfrak{p})$, 从而有唯一的一般点 $\mathfrak{p}$. 进一步地, 若 $D(f)$ 是与 $V(\mathfrak{p})$ 相交的仿射开集, 则 $\mathfrak{p} \in D(f)$, 因此 $\mathfrak{p}$ 也是 $D(f) \cap V(\mathfrak{p})$ 的一般点. □

习题 2.10. 描述 $\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]$. 其底空间与 $\mathbb{R}$ 这个集合有何区别? 与 $\mathbb{C}$ 呢?

证明. $\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]$ 中有一般点 (0), 还有若干闭点; 闭点与 $\mathbb{R}[x]$ 中的不可约多项式一一对应: 即对每个 $r \in \mathbb{R}$, 有闭点 $(x-r)$; 对任意 $b^2 - 4c < 0$, 有闭点 $(x^2 + bx + c)$. 截面则与习题 2.5 类似.

其底空间比集合 $\mathbb{R}$ 多出一般点以及二次多项式对应的闭点. 而与 $\mathbb{C}$ 相比, 每个复数都与其复共轭等同起来了 (此外当然也多出了一般点). □

习题 2.11. 令 $k = \mathbb{F}_p$ 是 p 元有限域, 描述 $\operatorname{Spec} k[x]$. 其点处的剩余域是什么? 给定一个域, $\operatorname{Spec} k[x]$ 中有多少以其为剩余域的点?

证明. $\operatorname{Spec} k[x]$ 的点有一个一般点 (0), 以及若干闭点, 与首一不可约多项式一一对应. (0) 处的剩余域是分式域 $k(x)$. 若 f 是不可约多项式, 则 (f) 处的多项式是 $k[x]/(f) \cong \mathbb{F}_q$, 其中 $q = p^{\deg f}$.

若给定 k 的有限扩域 $\mathbb{F}_q, q = p^n$, 则以其为剩余域的点的个数即为 $k[x]$ 中 n 次首一不可约多项式的个数, 由 Gauss 公式即为

$$\frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) q^d.$$ □

习题 2.12 (粘接引理)**.** 结论很有用, 但是证明平凡. 不写了!

习题 2.13. 若拓扑空间 X 的任意开覆盖都有子覆盖, 就称 X *拟紧* (其实就是一般情况下提及的紧).

(a) 证明: 拓扑空间 Noether 当且仅当其任意开子集拟紧.

(b) 若 X 是仿射概形, 证明 $\operatorname{sp}(X)$ 拟紧, 但是一般并不 Noether. 如果 $\operatorname{sp}(X)$ Noether, 就说 X Noether.

(c) 若 A 是 Noether 环, 证明 $\operatorname{sp}(\operatorname{Spec} A)$ 是 Noether 空间.

(d) 给出上一条的逆命题的一个反例, 即 $\operatorname{sp}(\operatorname{Spec} A)$ 是 Noether 空间, 但 A 不 Noether.

证明. (a) 由定义平凡.

(b) 若 $\operatorname{sp}(\operatorname{Spec} A) \subseteq \bigcup_i U_i$, 不妨设每个 U_i 都是基本开集 $D(f_i)$. 那么作为理想, $1 = \sum_i (f_i)$, 即存在有限个 f_i 可以生成 A. 因此对应的有限个 $D(f_i)$ 覆盖 $\operatorname{Spec} A$, 从而覆盖 $\operatorname{sp}(\operatorname{Spec} A)$.

(c) 若 A 是 Noether 环, 则其理想满足升链条件, 对应在 $\operatorname{Spec} A$ 中就说明其闭集满足降链条件. 因此 $\operatorname{Spec} A$ 是 Noether 空间, $\operatorname{sp}(\operatorname{Spec} A)$ 作为其子空间也是 Noether 空间.

(d) 设 $A = k[x_1, x_2, \dots]/(x_1^2, x_2^2, \dots)$. 记 $\mathfrak{p} = (x_1, x_2, \dots) \subseteq A$, 则 $A/\mathfrak{p} \cong k$, 且 $\mathfrak{p}$ 中元素都幂零. 因此 A 只有 $\mathfrak{p}$ 一个素理想, 从而 $\operatorname{Spec} A$ Noether. 但是 A 显然不 Noether. □

习题 2.14. (a) 设 S 是分次环. 证明 $\operatorname{Proj} S = \varnothing$ 当且仅当 S_+ 中仅包含幂零元素.

(b) 设 $\varphi : S \to T$ 是分次环的分次同态 (即保持次数的同态). 令 $U = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} T \mid \mathfrak{p} \not\supseteq \varphi(S_+)\}$. 证明 U 是 $\operatorname{Proj} T$ 的开子集, 且 φ 决定了一个自然同态 $f : U \to \operatorname{Proj} S$.

(c) 即使 φ 不是同构, f 也可能是. 比如说, 设 $\varphi_d : S_d \to T_d$ 在 $d \geq d_0$ 的情况下都是同构, 其中 d_0 是非负整数. 证明 $U = \operatorname{Proj} T$ 并且 $f :\ \operatorname{Proj} T \to \operatorname{Proj} S$ 是同构.

(d) 设 V 是射影簇, 其分次坐标环是 S. 证明 $t(V) \cong \operatorname{Proj} S$.

证明. (a) 若 S_+ 中不仅包含幂零元素, 则考虑不包含某个非幂零元素及其幂的极大真齐次理想, 不难证明其是齐次素理想.

反之, 设 S_+ 中仅包含幂零元素, 则若 $\mathfrak{p} \subseteq S$ 是齐次素理想, 则 $\mathfrak{p} \supseteq \sqrt{(0)} \supseteq S_+$. 因此一切齐次素理想都包含 S_+, 从而 $\operatorname{Proj} S = \varnothing$.

(b) $U = \operatorname{Proj} T - V(\varphi(S_+))$ 当然是 $\operatorname{Proj} T$ 中的开集. 若 $\mathfrak{p} \in U$, 可以定义 $f(\mathfrak{p}) = \ker(S \to T \to T/\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. 而 $f^\#$ 可以由 φ 诱导的局部环同态 $S_{(f(\mathfrak{p}))} \to T_{(\mathfrak{p})}$ 定义.

(c) 若 φ_d 在 $d \geq d_0$ 的情况下都是同构, 则 $T/\varphi(S)$ 中次数大于 0 的齐次元素都是幂零元. 因此易知 $U = \operatorname{Proj} T$. 为证明 f 是同构, 只需证明 φ 诱导的局部环同态 $S_{(\varphi^{-1}\mathfrak{p})} \to T_{(\mathfrak{p})}$ 都是同构. 取元素验证其既单又满即可.

(d) 不会. □

习题 2.15. 不会代数簇, 不写了.

习题 2.16. 令 X 是概形, $f \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, 定义

$$X_f = \{x \in X \mid f_x \notin \mathfrak{m}_x\}.$$

其中 $f_x \in \mathscr{O}_x$ 是 f 在 x 处的茎, $\mathfrak{m}_x$ 是 $\mathscr{O}_x$ 的极大理想.

(a) 设 $U = \operatorname{Spec} B$ 是 X 中的仿射开集, $\bar{f} \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X|_U)$ 是 f 的限制, 证明 $U \cap X_f = D(\bar{f})$. 由此说明 X_f 是开集.

(b) 假设 X 拟紧. 令 $A = \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, $a \in A$ 且 a 限制在 X_f 上消失. 证明存在 $n > 0$, 使得 $f^n a = 0$ [提示：用仿射开集覆盖 X].

(c) 现在假设 X 可以由有限个仿射开集 U_i 覆盖, 且交集 $U_i \cap U_j$ 全都拟紧 (比如说, $\operatorname{sp}(X)$ 是 Noether 空间时即满足此条件). 令 $b \in \Gamma(X_f, \mathscr{O}_{X_f})$. 证明对某个 $n > 0$, $f^n b$ 是 A 中元素的限制.

(d) 沿用 (c) 中的假设, 证明 $\Gamma(X_f, \mathscr{O}_{X_f}) \cong A_f$.

证明. (a) 若 $x \in U$, 则 $f_x = \bar{f}_x$. 因此显然.

(b) 先设 $X = \operatorname{Spec} A$ 是仿射开集. 则 $X_f = D(f), \mathscr{O}_X|_{X_f} \cong \operatorname{Spec} A_f$. 因此 a 限制在 X_f 上消失等价于存在 $n > 0$ 使得 $f^n a = 0$.

在一般情况下, 由于 X 可以由仿射开集覆盖, 而其拟紧, 从而其可以由有限个仿射开集覆盖, 设为 $U_1, \dots, U_k$, 其中 $U_i \cong \operatorname{Spec} B_i$. 记 f, a 在 U_i 上的限制为 $\bar{f}_i, \bar{a}_i \in B_i$. 由上述推导, 对每个 i, 存在 n_i 使得 $\bar{f}_i^{n_i} \bar{a}_i = 0$. 取 n 为 n_i 中的最大值, 则由层的唯一性公理即知 $f^n a = 0$.

(c) 先设 $X = \operatorname{Spec} A$ 是仿射开集, 则 $b \in \Gamma(X_f, \mathscr{O}_{X_f}) \cong A_f$, 从而存在 n 使得 $f^n b$ 是 A 中元素的限制.

一般情况下, 同 (b), 设 X 可以由 $U_1, \dots, U_k$ 覆盖, $U_i \cong \operatorname{Spec} B_i$. 同理定义 $\bar{f}_i \in \Gamma(U_i, \mathscr{O}_X), \bar{b}_i \in \Gamma(U_i \cap X_f, \mathscr{O}_X)$. 则存在 n, 使得每个 $\bar{f}_i^n \bar{b}_i$ 是 $a_i \in A$ 的限制. 此时对每一对 $i \neq j$, $a_i - a_j$ 在 $U_i \cap U_j \cap X_f$ 上的限制为 0. 因此由 (b), 存在 m_{ij} 使得 $f^{n_{ij}}(a_i - a_j)$ 在 $U_i \cap U_j$ 上限制为 0. 取 m 为 m_{ij} 的最大值, 则 $\{f^m a_i\}$ 彼此兼容, 从而可以粘贴成 $t \in A$, 其在 X_f 上的限制即是 $f^{n+m} b$.

(d) 显然 f 在 $\Gamma(X_f, \mathscr{O}_{X_f})$ 上可逆. 从而由 (b) (c) 易证. □

习题 2.17 (仿射性的判别条件). (a) 设 $f: X \to Y$ 是概形同态, 且 Y 可以由若干开集 U_i 覆盖, 使得每个限制映射 $f^{-1}(U_i) \to U_i$ 是同构. 证明 f 也是同构.

(b) 概形 X 仿射当且仅当存在有限个元素 $f_1, \dots, f_r \in A = \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, 使得每个开集 X_{f_i} 都仿射, 且 $(f_1, \dots, f_r) = A$ [提示：使用前面的习题 2.4 和习题 2.16d].

证明. (a) 容易知道 f 在底空间上是同胚. 且 f 在茎上都是同构, 从而 f 是同构.

(b) 由习题 2.16d 知道 $X_{f_i} \cong \operatorname{Spec} A_{f_i}$. 用习题 2.4 的方法构造映射 $g: X \to \operatorname{Spec} A$. 不难发现 g 将 X_{f_i} 映射到 $D(f_i)$, 且映射 $g(X_{f_i}): \mathscr{O}_X(X_{f_i}) \to A_{f_i}$ 是同构. 因此再由习题 2.4 就知道 $g|_{X_{f_i}}$ 即是同构 $X_{f_i} \cong \operatorname{Spec} A_{f_i}$. 由 $(f_1, \dots, f_r) = A$ 即知 $D(f_i)$ 覆盖 $\operatorname{Spec} A$. 因此由 (a) 即证. □

习题 2.18. 本习题中, 我们将比较环同态的若干性质和其诱导的谱的同态的性质.

(a) 设 A 是环, $X = \operatorname{Spec} A, f \in A$. 证明 f 幂零当且仅当 $D(f)$ 为空.

(b) 令 $\varphi: A \to B$ 是环同态, $f: Y = \operatorname{Spec} B \to X = \operatorname{Spec} A$ 是诱导的仿射概形同态. 证明 φ 是单射当且仅当对应的层映射 $f^\#: \mathscr{O}_X \to f_* \mathscr{O}_Y$ 是单射. 更进一步地, 证明这种情况下 f 是支配的, 即 $f(Y)$ 在 X 中稠密.

(c) 在同样的假设下, 证明：若 φ 是满射, 则 f 将 Y 同胚到 X 的闭子集, 且 $f^\#$ 是满射.

(d) 证明 (c) 的逆命题, 即如果 f 将 Y 同胚到 X 的闭子集, 且 $f^\#$ 是满射, 则 φ 是满射 [提示：考虑 $X' = \operatorname{Spec}(A/\ker\varphi)$, 并使用 (b) 和 (c)].

证明. (a) 平凡.

(b) 若 $f^\#$ 是单射, 则 $f^\#(X): \mathcal{O}_X(X) = A \to f_*\mathcal{O}_Y(X) = B$ 是单射, 即 φ 是单射.

反之, 若 φ 是单射, 则对任意 $a \in A$, $A_a \to B_{\varphi(a)}$ 也是单射; 即 $f^\#(D(a))$ 是单射. 若 U 是开集, $s \in \mathcal{O}_X(U), f^\#(U)(s) = 0$, 则 s 限制在每个 $D(a) \subseteq U$ 上为 0. 由于 $D(a)$ 构成一组基, 由层的唯一性公理即知 $s = 0$. 因此 $f^\#$ 是单射.

并且若 φ 是单射, 则对任意 $a \in A$, a 不幂零, $\varphi(a)$ 也不幂零. 因此 $B_{\varphi(a)}$ 非 0 环, 即 $f^{-1}(D(a)) \neq \varnothing$. 因此 $f(Y)$ 与所有开集相交非空, 即稠密.

(c) 设 φ 是满射, 则 $B \cong A/\ker\varphi$, 从而 B 的素理想通过 f 和 A 中所有包含 $\ker\varphi$ 的素理想一一对应. 因此 f 将 Y 同胚到 $V(\ker\varphi) \subseteq A$. 且类似 (b), 若 $a \in A$, 则 $A_a \to B_{\varphi(a)}$ 是满射. 从而 $f^\#$ 在一组开集基上的映射都为满射, 因此 $f^\#$ 是满射 (因为茎上的映射都是满射).

(d) 定义 $X' = \mathrm{Spec}(A/\ker\varphi)$, 则 φ 分解为 $\pi: A \to A/\ker\varphi$ 和 $\varphi': A/\ker\varphi \to B$. 因此 f 也分解为 $f': Y \to X'$ 和 $p: X' \to X$. 由于 φ' 是单射, $f'(Y)$ 在 X' 中稠密. 然而 X' (拓扑上) 可以看作 X 的子空间, 从而 $f'(Y)$ 是 X' 的闭集, 因此 $f'(Y) = X'$.

而 $f^\#: \mathcal{O}_X \to p_*\mathcal{O}_{X'} \to f_*\mathcal{O}_Y$ 是满射, 因此由 p 是单射即知 $f'^\#: \mathcal{O}_{X'} \to f'_*\mathcal{O}_Y$ 是满射. 而 $f^\#$ 又是单射, 因此是同构. f' 也是同胚, 所以 $X' \cong Y$, 因此 $A/\ker\varphi \cong B$, 即 φ 是满射. □

习题 2.19. 令 A 是环, 证明下列条件彼此等价:

1) $\mathrm{Spec}\, A$ 不连通.

2) 存在非零元素 $e_1, e_2 \in A$ 使得 $e_1 e_2 = 0, e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, e_1 + e_2 = 1$ (这样的元素称为*正交幂等元*).

3) A 同构于两个非零环的直积.

证明. 若 (2) 成立, 则 $\mathrm{Spec}\, A = D(e_1) \cup D(e_2), D(e_1) \cap D(e_2) = \varnothing$, 因此 (1) 成立.

若 (3) 成立, 则两个直积因子中的单位元即是正交幂等元, 从而 (2) 成立.

若 (1) 成立, 记 $\mathrm{Spec}\, A = U_1 \cup U_2, U_1 \cap U_2 = \varnothing$. 设 $U_1 = V(\mathfrak{a}_1), U_2 = V(\mathfrak{a}_2)$, 其中 $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ 是根理想. 则 $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = 0, \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = A$. 因此 $A = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$. 从而 (3) 成立. □