习题 1. 设 X 为 Noether 空间.

(i) 设 $\{\mathscr{F}_i\}$ 为 X 上的 Abel 群层. 则

$$H^n(X, \bigoplus_i \mathscr{F}_i) \cong \bigoplus_i H^n(X, \mathscr{F}_i) \quad \forall n.$$

(ii) 设 J 为有向集, $(\{\mathscr{F}_i\}, \{\varphi_{i,j}\})_{i\in J}$ 为 X 上 Abel 群层的有向系. 则

$$H^n(X, \varinjlim_i \mathscr{F}_i) \cong \varinjlim_i H^n(X, \mathscr{F}_i) \quad \forall n.$$

证明. 在 (ii) 中取 J 为 I 的所有有限子集就知道 (i) 是 (ii) 的直接推论. (有限直和显然保持同调).

据 Hartshorne 习题 II.1.11, 由于 X 是 Noether 空间, 有

$$\Gamma(X, \varinjlim_i \mathscr{F}_i) \cong \varinjlim_i \Gamma(X, \mathscr{F}_i).$$

这同时也说明若诸 $\mathscr{F}_i$ 都为松层, 则 $\varinjlim_i \mathscr{F}_i$ 也松; 且 $\varinjlim_i$ 正合.

因此我们取 $\mathscr{F}_i$ 的内射消解 $\mathscr{I}_i^\bullet$, 则 $\varinjlim_i \mathscr{I}_i^\bullet$ 即为 $\varinjlim_i \mathscr{F}_i$ 的零调消解. 取上同调, 由正合性即得结论. □

习题 2.

(i) 设 $f: X \to Y$ 连续. 则对 X 上任意 Abel 群层 $\mathscr{F}$ 和任意 i, $R^i f_* \mathscr{F}$ 恰为预层

$$V \mapsto H^i(f^{-1}V, \mathscr{F})$$

的层化.

(ii) 设 $(X, \mathscr{O}_X)$ 为环化空间, $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ 为 $\mathscr{O}_X$ 模. 则对任意 i, $\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ 即为预层

$$U \mapsto \operatorname{Ext}^i_{\mathscr{O}_X|_U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$$

的层化.

证明.

(i) 设 $\mathscr{I}^\bullet$ 为 $\mathscr{F}$ 的内射消解. 则 $R^i f_* \mathscr{F}$ 按定义即为 $f_* \mathscr{I}^\bullet$ 的上同调. 而 $f_* \mathscr{I}^\bullet$ 作为预层的上同调即为 $V \mapsto H^i(f^{-1}V, \mathscr{F})$. 层化函子是预层范畴到层范畴的正合函子, 因此其保持链复形的上同调, 因而 $f_* \mathscr{I}^\bullet$ 作为层的上同调即为预层 $V \mapsto H^i(f^{-1}V, \mathscr{F})$ 的层化.

(ii) 类似的, 我们取 $\mathscr{G}$ 的内射消解 $\mathscr{I}$. 则 $\mathscr{E}xt^i_{\mathscr{O}} = H^i(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{I}^\bullet))$. 按定义, $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{I}^\bullet)$ 即为层 $U \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X|U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{I}^\bullet|_U)$ 构成的链复形. 因此作为预层, 其上同调即为 $U \mapsto \operatorname{Ext}^i_{\mathscr{O}_X|_U}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$. 而层化保链复形上同调, 因此此链复形作为层的上同调即为上述预层的层化. □

习题 3. 设 $(X, \mathscr{O}_X)$ 为环化空间, $\mathscr{F}$ 为 $\mathscr{O}_X$ 模. 令

$$0 \to \mathscr{G}' \to \mathscr{G} \to \mathscr{G}'' \to 0$$

为 $\mathscr{O}_X$ 模范畴中的短正合列. 证明有长正合列

$$\begin{aligned}\cdots \to \operatorname{Ext}^i_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G}'', \mathscr{F}) \to \operatorname{Ext}^i_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G}, \mathscr{F}) \to \operatorname{Ext}^i_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G}', \mathscr{F}) \xrightarrow{\delta} \\ \to \operatorname{Ext}^{i+1}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G}'', \mathscr{F}) \to \cdots.\end{aligned}$$

证明. 只需证明 $\operatorname{Ext}^i_{\mathscr{O}_X}(-, \mathscr{F})$ 亦是反变函子 $\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(-, \mathscr{F})$ 的右导出函子. 这是同调代数的基本结果.

可以通过同时取 $\mathscr{G}$ 的投射消解 $\mathscr{P}^\bullet$ 和 $\mathscr{F}$ 的内射消解 $\mathscr{I}^\bullet$, 直和得到双重链复形, 取其两种不同的滤结构求谱序列即得到 $H^i(\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G}, \mathscr{I}^\bullet)) \cong H^i(\operatorname{Tot}^\oplus(\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{P}^\bullet, \mathscr{I}^\bullet))) \cong H^i(\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{P}^\bullet, \mathscr{F}))$. □

习题 4. 设 $(X, \mathscr{O}_X)$ 为环化空间, $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ 为 $\mathscr{O}_X$ 模. 定义 $\mathscr{F}$ 对 $\mathscr{G}$ 的扩张为形如

$$0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to 0$$

的短正合列; 两个扩张 $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ 等价当且仅当有交换图

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{G} \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{G} \arrow[r] & \mathscr{E}' \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

证明存在自然的一一对应

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \{\mathscr{F} \text{ 对 } \mathscr{G} \text{ 的扩张}\}/\cong.$$

证明. 这也是同调代数的基本结果. 我们不管 $(X, \mathscr{O}_X)$, 改为在任意有足够投射对象的 Abel 范畴 $\mathscr{C}$ 中考虑.

记 $A, B \in \mathscr{C}$. 我们记 $e(A,B)$ 为所有 A 对 B 的扩张构成的的等价类的集合. 记 $\cdots \to P_1 \xrightarrow{d} P_0 \xrightarrow{\pi} A$ 为 A 的投射消解. 则对任意扩张 $0 \to B \to E \to A \to 0$, 我们有提升

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E \arrow[r] & A \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

且这样的提升在同伦意义下唯一. 此映射 $\varphi\colon P_1 \to B$ 是链复形 $\mathrm{Hom}(P_\bullet, B)$ 中的上环, 因此给出了 $[\varphi] \in H^1(\mathrm{Hom}(P_\bullet, B)) = \mathrm{Ext}^1(A,B)$. 同伦唯一性说明此上同调类不依赖于提升的选择 (这就是 $\mathrm{id}_B \in \mathrm{Hom}(B,B)$ 对应的上同调类的拉回).

记 E' 为 $B \xleftarrow{\varphi} P_1 \xrightarrow{d} P_0$. 则按定义有交换图表

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "="] & E' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E \arrow[r] & A \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

其中 $\psi\colon E' \to A$ 由 $B \xrightarrow{0} A \xleftarrow{\pi} P_0$ 诱导. 第二行事实上也正合: 其显然在 B 和 A 处正合, 且是链复形. 若 $p \in P_0, b \in B$, 使得 $\psi(p+b) = 0$, 则 $\pi(p) = 0$. 因此存在 $p_1 \in P_1$ 使得 $p_0 = d(p_1)$. 因而在 E' 中有 $p + b = d(p_0) + b \in B$.

只关注后两行. 由五引理, $E \cong E'$. 因此扩张 $E \cong E' \in e(A,B)$ 反过来被 φ 唯一确定.

综上, 我们已经有如下交换图表

$$\begin{tikzcd}
e(A,B) \arrow[dr, "E \mapsto [\varphi]"'] & \mathrm{Hom}(P_1, B) \arrow[l, "\varphi \mapsto B \amalg P_0"'] \arrow[d] \\
 & \mathrm{Ext}^1(A,B).
\end{tikzcd}$$

只需再证明若 $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}(P_1, B)$ 给出同一个等价类, 则他们给出同一个扩张. 而此时存在 $\psi \in \mathrm{Hom}(P_0, B)$ 使得 $\varphi - \varphi' = \psi d$. 因此 $E = B \amalg_{P_1, \varphi} P_0$ 和 $E' = B \amalg_{P_1, \varphi'} P_0$ 之间有同构 $(p, b) \mapsto (p, b + \psi(p))$. 所以上述映射 $\varphi \mapsto B \amalg_{P_1, \varphi} P_0$ 确实诱导了 $\mathrm{Ext}^1(A,B) \to e(A,B)$ 的映射, 其与 $E \mapsto [\varphi]$ 互逆. 这样就给出了一一对应. $\square$